

Câu I (2 điểm). Người ta tiến hành đo nhiệt độ vào 1 ngày mùa đông tại thành phố A được kết quả như sau

t (giờ)	0	2	4	6	8	10	12
T = T(t) ($^{\circ}\text{C}$)	-15,4	-12,7	-8,9	-1,5	5,2	7,4	8,5

a) Áp dụng nội suy bậc 2 tại 3 thời điểm 2 giờ, 4 giờ và 6 giờ, hãy ước lượng nhiệt độ vào lúc 3 giờ sáng ta được kết quả là $T(3) \approx$ **(1)**

b) Áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất, xây dựng đường cong dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ mô tả sự thay đổi nhiệt độ ở bảng trên ta được kết quả $y \approx$ **(2)**.

c) Biết rằng nhiệt độ trung bình trong khoảng 0 giờ đến 12 giờ được tính bằng công thức $\bar{T} = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(t) dt$. Ước lượng nhiệt độ trung bình của bảng số liệu trên bằng công thức hình thang và công thức Simpson ta được kết quả lần lượt là $T_{ht} \approx$ **(3)** và $T_{ss} \approx$ **(4)**.

Câu II (1,5 điểm). Một bình chứa hình cầu bán kính $r = 3\text{dm}$ chứa một lượng chất lỏng có thể tích $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$, trong đó h là chiều cao của lượng chất lỏng.

a) Áp dụng phương pháp Newton, ước lượng chiều cao của mực chất lỏng nếu thể tích của nó là $V = 0,5 \text{ dm}^3$ và chọn $h_0 = 0,4 \text{ dm}$ ta được kết quả $h_1 \approx$ **(5)** và $h_2 \approx$ **(6)**

b) Đánh giá sai số của h_2 ở câu a nếu xét $h \in [0,1; 0,5]$ ta được kết quả $\Delta h \leq$ **(7)**

Câu III (1,5 điểm) Tốc độ phân rã của radium được biểu diễn bởi phương trình

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{\ln 2}{T} R(t)$$

Trong đó: $R(t)$ là lượng radium còn lại tại thời điểm t (đơn vị năm)

T : chu kỳ bán rã của radium (khoảng thời gian cần thiết để phân rã hết $\frac{1}{2}$ lượng radium ban đầu)

Giả sử lượng radium ban đầu là 1g (ứng với thời điểm $t = 0$). Sử dụng các phương pháp gần đúng, ước lượng lượng radium còn lại sau 24 năm trong các trường hợp sau biết chu kỳ bán rã của radium là $T = 1600$ năm.

a) Áp dụng phương pháp Euler, $h = 80$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(8)**

b) Áp dụng phương pháp Euler, $h = 30$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(9)**

c) Áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 2, $h = 80$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(10)**

Câu IV (2,0 điểm). Sử dụng một thước đo với sai số tương đối là 1,5% để đo kích thước của một cái hộp hình chữ nhật thu được các kết quả như sau

$$a = 2,85cm; b = 4,24cm; c = 1,12cm$$

a) Sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích cái hộp lần lượt là $\Delta V \leq (11)$ và $\delta V \leq (12)$

b) Quy tròn thể tích V với 1 chữ số không chắc ta được $V = (13)$

c) Để sai số tuyệt đối của thể tích V không quá 3% thì cần chọn lại thước đo với sai số tương đối $\delta \leq (14)$

Câu V (3,0 điểm). TỰ LUẬN

a) Tìm hàm ảnh của hàm gốc $f(t) = t^3 \sin 3t + \int_0^t e^{-4u} \cos(t-u) dt$

b) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân sau
 $y'' + 5y' - 6y = e^{-t} + 7 \sin t$ biết $y(0) = y'(0) = 0$

Ghi chú: 1. Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

2. Trong các tính toán lấy kết quả với 4 chữ số thập phân.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CDR G1.1]: Định nghĩa và áp dụng các khái niệm sai số tương đối, tuyệt đối, chữ số chắc, sai số do phép toán vào các bài toán cụ thể.	Câu IV
[CDR G1.2]: Có khả năng áp dụng các phương pháp lặp, phương pháp Newton vào giải gần đúng và đánh giá sai số các phương trình đại số cụ thể	Câu II
[CDR G1.4]: Hiểu được ý nghĩa và phương pháp sử dụng đa thức nội suy trong xấp xỉ hàm số cụ thể. Ưu, nhược điểm thức nội suy Lagrange, đa thức nội suy Newton	Câu I.a
[CDR G1.5]: Có khả năng áp dụng công thức hình thang và công thức Simpson vào tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân xác định cụ thể.	Câu I.c
[CDR G1.6]: Hiểu bắt ý nghĩa phương pháp bình phương bé nhất và vận dụng tìm một số đường cong cụ thể từ phương pháp này	Câu I.b
[CDR G1.7]: Có khả năng vận dụng các phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge-Kutta bậc 1, 2, 4 vào giải các phương trình vi phân thường với điều kiện điểm đầu.	Câu III
[CDR G1.8]: Có khả năng thực hiện phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Laplace ngược và ứng dụng giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hệ phương trình vi phân.	Câu V

Ngày 30 tháng 12 năm 2015

Thông qua bộ môn
(ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Văn Toàn

Câu I (2 điểm). Người ta tiến hành đo nhiệt độ vào 1 ngày mùa đông tại thành phố A được kết quả như sau

t (giờ)	0	2	4	6	8	10	12
T = T(t) (°C)	-12,4	-10,5	-9,2	1,5	3,2	6,4	7,5

- a) Áp dụng nội suy bậc 2 tại 3 thời điểm 2 giờ, 4 giờ và 6 giờ, hãy ước lượng nhiệt độ vào lúc 3 giờ sáng ta được kết quả là $T(3) \approx$ **(1)**
- b) Áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất, xây dựng đường cong dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ mô tả sự thay đổi nhiệt độ ở bảng trên ta được kết quả $y \approx$ **(2)**.
- c) Biết rằng nhiệt độ trung bình trong khoảng 0 giờ đến 12 giờ được tính bằng công thức $\bar{T} = \frac{1}{12} \int_0^{12} T(t) dt$. Ước lượng nhiệt độ trung bình của bảng số liệu trên bằng công thức hình thang và công thức Simpson ta được kết quả lần lượt là $T_{ht} \approx$ **(3)** và $T_{ss} \approx$ **(4)**.

Câu II (1,5 điểm). Một bình chứa hình cầu bán kính $r = 3\text{dm}$ chứa một lượng chất lỏng có thể tích $V = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$, trong đó h là chiều cao của lượng chất lỏng.

- a) Áp dụng phương pháp Newton, ước lượng chiều cao của mực chất lỏng nếu thể tích của nó là $V = 0,5 \text{ dm}^3$ và chọn $h_0 = 0,5 \text{ dm}$ ta được kết quả $h_1 \approx$ **(5)** và $h_2 \approx$ **(6)**
- b) Đánh giá sai số của h_2 ở câu a nếu xét $h \in [0,1; 0,5]$ ta được kết quả $\Delta h \leq$ **(7)**

Câu III (1,5 điểm) Tốc độ phân rã của radium được biểu diễn bởi phương trình

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{\ln 2}{T} R(t)$$

Trong đó: $R(t)$ là lượng radium còn lại tại thời điểm t (đơn vị năm)

T : chu kỳ bán rã của radium (khoảng thời gian cần thiết để phân rã hết $\frac{1}{2}$ lượng radium ban đầu)

Giả sử lượng radium ban đầu là 1,2g (ứng với thời điểm $t = 0$). Sử dụng các phương pháp gần đúng, ước lượng lượng radium còn lại sau 240 năm trong các trường hợp sau biết chu kỳ bán rã của radium là $T = 1600$ năm.

- a) Áp dụng phương pháp Euler, $h = 80$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(8)**
- b) Áp dụng phương pháp Euler, $h = 30$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(9)**
- c) Áp dụng phương pháp Runge-Kutta bậc 2, $h = 80$ năm, ta có $R(240) \approx$ **(10)**

Câu IV (2,0 điểm). Sử dụng một thước đo với sai số tương đối là 1% để đo kích thước của một cái hộp hình chữ nhật thu được các kết quả như sau

$$a = 2,85cm; b = 4,24cm; c = 1,12cm$$

- Sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích cái hộp lần lượt là $\Delta V \leq \mathbf{(11)}$ và $\delta V \leq \mathbf{(12)}$
- Quy tròn thể tích V với 1 chữ số không chắc ta được $V = \mathbf{(13)}$
- Để sai số tuyệt đối của thể tích V không quá 2% thì cần chọn lại thước đo với sai số tương đối $\delta \leq \mathbf{(14)}$

Câu V (3,0 điểm). TỰ LUẬN

- Tìm hàm ảnh của hàm gốc $f(t) = t^3 \sin 3t + \int_0^t e^{-4u} \cos(t-u) dt$
- Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân sau
 $y'' + 5y' - 6y = e^{-t} + 7 \sin t$ biết $y(0) = y'(0) = 0$

- Ghi chú:*
- Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.
 - Trong các tính toán lấy kết quả với 4 chữ số thập phân.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CDR G1.1]: Định nghĩa và áp dụng các khái niệm sai số tương đối, tuyệt đối, chữ số chắc, sai số do phép toán vào các bài toán cụ thể.	Câu IV
[CDR G1.2]: Có khả năng áp dụng các phương pháp lặp, phương pháp Newton vào giải gần đúng và đánh giá sai số các phương trình đại số cụ thể	Câu II
[CDR G1.4]: Hiểu được ý nghĩa và phương pháp sử dụng đa thức nội suy trong xấp xỉ hàm số cụ thể. Ưu, nhược điểm thức nội suy Lagrange, đa thức nội suy Newton	Câu I.a
[CDR G1.5]: Có khả năng áp dụng công thức hình thang và công thức Simpson vào tính gần đúng và đánh giá sai số các tích phân xác định cụ thể.	Câu I.c
[CDR G1.6]: Hiểu bắt ý nghĩa phương pháp bình phương bé nhất và vận dụng tìm một số đường cong cụ thể từ phương pháp này	Câu I.b
[CDR G1.7]: Có khả năng vận dụng các phương pháp Euler, Euler cải tiến, Runge-Kutta bậc 1, 2, 4 vào giải các phương trình vi phân thường với điều kiện điểm đầu.	Câu III
[CDR G1.8]: Có khả năng thực hiện phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Laplace ngược và ứng dụng giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hệ phương trình vi phân.	Câu V

Ngày 30 tháng 12 năm 2015
Thông qua bộ môn
(ký và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Văn Toàn